

國立宜蘭大學 106 年度第一次微積分競試 試題

※注意事項※

1. 考試時間為 100 分鐘(13:10-14:50)，考試開始 10 分鐘後不得入場，考試期間不得離開考場；考試期間亦禁止使用字典、計算機及任何通訊器材。
2. 本試題共計 24 題，總分為 101.9 分。
3. 各題答案請依題號填入答案卷上相對應題號的空格內，填錯格或填在格外者不予計分，字跡切勿潦草，答錯或未作答者，不給分亦不倒扣。
4. 請將您的班級、學號及姓名，用正楷填寫於答案卷上方的欄位內。
5. 考試結束時，請將答案卷繳回即可，本試題不必繳回。
6. 14:00 後才能提早交卷。

祝考試順利!!!

1-8 題每題 3 分

1. Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$

2. Evaluate $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2} - \frac{1}{x^2}}{\Delta x}$

3. $f(x) = \sqrt{x}$, find the value $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \right]$

4. Let $f(x) = x^2$ for $x > 0$. $g(x) = \frac{d}{dx}[f^{-1}(x)]$, $g(9) = ?$

5. Write an equation of the tangent line passing through the point (8, 2) on the curve of $y = \sqrt[3]{x}$ (答案請用 $y = ax + b$ 的形式表示)

6. Find the absolute extreme (maximum and minimum) values of the function $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ over the interval $D: [0, 3]$

7. 求 $\int_0^2 |2x-1| dx$

8. Find the distance between the given parallel planes.

$$-2x + y + z = 0 \quad \text{and} \quad 10x - 5y - 5z - 21 = 0$$

9-16 題每題 4 分

9. For what interval of x does the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} (-2x)^{n-1}$ converge ?

10. Evaluate $f'(1)$ if $f(x^5) = 3f(x) - 4x^2 + 5x - 6$

11. Find all the asymptotes of the function $f(x) = \frac{3x^2 + 5}{3 - x^2}$

12. Find all the inflection points of the function $f(x) = \log_2(3x^2 + 2)$

13. 求 $\int_0^2 \int_{-1}^1 (x^2 y + y^2) dx dy$

14. 在 2010 年 1 月 1 日到 2013 年 1 月 1 日間美國西南各州房子的中間價格為 $f(t) = t^3 - 7t^2 + 17t + 280$, $0 \leq t \leq 3$, 其中 $f(t)$ 以千元計, t 是以年計, $t = 0$ 代表 2010 年初。求美國西南各州房價在這段期間的平均值為_____ (千元)。

15. Find the exact arc length of the curve over the stated interval.

$$x = \cos 7t, \quad y = \sin 7t; \quad 0 \leq t \leq \pi$$

16. 求 $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx$

17-24 題每格 5.1 分

17. Use any method to determine whether the series converges.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2 - 6n + 5}{12n^7 + 3n - 8}$ and (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{9e^k}$

18. Find the interval of convergence: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+4}$

19. Find the arc length of the graph of $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = t^3 \hat{i} + t \hat{j} + \frac{1}{2} \sqrt{6} t^2 \hat{k}, \quad 2 \leq t \leq 5$$

20. Find $\frac{\partial z}{\partial x}$ of the equation $x + y = \sin(xy + z)$

21. 已知加熱板的溫度($^{\circ}\text{C}$)分布函數為 $T = x^2 + y^3$ ，一隻小蟲由 $(1, 0)$ 位置出發，以一圈 2π 分鐘的等速率逆時針繞著半徑 1 的圓形軌跡爬行了 π 分鐘。請推算在行進中牠感受到的最低溫 (21a) ($^{\circ}\text{C}$)，當爬行了 $\frac{\pi}{4}$ 分鐘時牠感受到的溫度變化率 (21b) ($^{\circ}\text{C}/\text{min}$)

22. 求 $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$

23. 求 $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3 + 1} dx dy$

24. 求 $\int_{-3}^{-2} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx + \int_{-2}^0 \int_{\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$