國立宜蘭大學 108 年度微積分競試 試題

※注意事項※

1. 考試時間為 100 分鐘(13:10-14:50)，考試開始 10 分鐘後不得入場，考試期間不得離開考場；考試期間亦禁止使用字典、計算機及任何通訊器材。
2. 本試題共計 22 題，總分為 102.6 分。
3. 各題答案請依題號填入答案卷上相對應題號的空格內,填錯格或填在格外者不予計分,字跡切勿潦草,答錯或未作答者,不給分亦不倒扣。
4. 請將您的班級、學號及姓名，用正楷填寫於答案卷上方的欄位內。
5. 考試結束時，請將答案卷繳回即可，本試題不必繳回。
6. 14:00 後才能提早交卷。

祝金榜題名!!!

<u>1-8 題每題 4 分</u>

1. 判定級數 $\sum_{n=1}^{\infty} 2(-\frac{1}{3})^n$ 收斂或發散？

2. 計算級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ 收斂值

3. 直角座標方程式 $y^2 = 9x$ 轉換為極座標形式

4. Evaluate $f(4)$， if

$$f(x) = 3 + \cfrac{x}{3 + \cfrac{x}{3 + \cfrac{x}{3 + \cfrac{x}{\cdots}}}}$$

5. Find $f'(-1)$, if $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x+2)(x+3)}$

(Hint : To solve this problem more rapidly, you'd better use the definition of the derivative of a function.)

6. Find the value of *k*, if any, that would make the following function continuous on the interval $[-\pi, \pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{2x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

7. 求橢圓 $x^2 + 4y^2 = 4$ 在點 $P(\sqrt{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ 的切線斜率

8. $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+9)(x+10)$，求 $f'(0)$

9-16 題每題 5 分

9. Find the limit of the following function if it exists. Otherwise, fill the blank with “**X**”, if the limit does not exist.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt{x^2-1}+x^2$

10. Find $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, if $y=\ln(x+1)$

11. $Z=\ln(x^2+y^2);\ x=2,\ y=3,\ dx=0.02,\ dy=-0.03$，求 dZ

    請以最簡分數表示，其餘形式不計分

12. $f(x,y)=(7e^{x+2y}+4)(e^{x^2}+y^2+2)$，求 $f_x(2,-1)$

13. Evaluate $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

14. Evaluate $\int_{-1}^1 \dfrac{x^2\tan x}{8-\cos x}\,dx$

15. Evaluate $\int 2^{\sin\theta}\cos\theta\,d\theta$

16. Evaluate $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

17-22 題每題 5.1 分

17. Find the length of the curve $y = \int_1^x \sqrt{\sqrt{t} - 1}\, dt$, $1 \le x \le 16$

18. Find $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ and $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. $yz = \ln(x + z)$

19. Find the directional derivative of the function at the given point in the direction of the vector $\mathbf{v}$. $g(s,t) = s\sqrt{t}$, $(2,4)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

20. Find the maximum rate of change of f at the given point and the direction in which it occurs. $f(x, y) = \sin(xy)$, $(1,0)$

21. Use Lagrange multipliers to find the extreme values of the function subject to the given constraint. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $x + y + z = 12$

22. Calculate the double integral.

$$\iint_R x \sec^2 y \, dA, \quad R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{4}\}$$